ピタゴラスの定理、フェルマーの定理の次は何だろう

平田典子

ピタゴラスの定理とは、直角三角形の斜辺の長さの2乗は、他の2辺の長さの2乗の和に等しい、という性質です。z を斜辺の長さ、x, y を他の2辺の長さとすると $x^2+y^2=z^2$ という式で表されます。このピタゴラスの定理の x, y, z は整数でなくても構わない。それでは、特に自然数（正の整数）に x, y, z を限ってピタゴラスの定理を再考しましょう。$x^2+y^2=z^2$ という関係式が成り立つ自然数 x, y, z の例としてはどんなものがあるでしょうか。

$3^2+4^2=5^2$
$12^2+5^2=13^2$
などがあり、x, y, z の最大公約数は1のとき、解の全てを

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

で表わせることが証明できます。ただし m, n は勝手な自然数で $m>n$ となるもの全部をうごきます。

たとえば $m=5, n=2$ ならば $(m^2-n^2)^2=21^2, (2mn)^2=20^2, (m^2+n^2)^2=29^2$ だから $441+400=841$ となります。

では $x^3+y^3=z^3$、あるいは「$x^n+y^n=z^n$（n は3以上の整数）を満たす整数 x, y, z を求める」問題ですが、これは Fermat の大定理（最終定理）と呼ばれ、1995年に A. Wiles によって、$xyz=0$ となる自明な場合以外には、整数解が無いことが証明されました。
たとえば、 $1^3+0^3=1^3$ これは当たり前ですが $1^3+1^3=z^3$ となる z は整数ではとれません。$x^n+y^n=z^n$ においては、$xyz=0$ となる場合以外には整数解が無いのです。

それでは、$x^\ell+y^m=z^n$ と、ℓ, m, n は自然数ですが、同じ数でなくても良い場合はどうでしょうか。この問題については次が知られています。Tijdeman 予想 (Beal 予想ともいいますが、未解決です）ℓ, m, n が3以上の自然数のとき、$x^\ell+y^m=z^n$ をみたす ℓ, m, n も x, y, z も自然数では存在しないであろう。

例
$2^5+7^2=3^4$
$7^3+13^2=2^9$
$3^5+11^4=122^2$
$17^2+76271^2=21063928^2$
$1414^3+2213459^2=65^7$
$9262^3+15312283^2=113^7$
$43^8+96222^3=30042907^2$
$33^8+1549034^2=15613^3$

どれもみな肩の上の数（指数と言います）に2が混じっています。つまり、ℓ, m, n には2が混じっていない、3以上の整数しか考えてはいけない場合は、ℓ, m, n も x, y, z も自然数では見つかりそうもないということです。

この特別な場合であり、Catalan 予想と呼ばれていて、2002年に P. Mihailescu により証明された結果は次のようなものです。
2以上の整数 m, n, x, y を未知数とする方程式

$$x^m-y^n=1$$

には、$3^2-2^3=1$ 以外の解が無い。
つまり、さっきの $x^\ell+y^m=z^n$ を移項して $z^n-y^m=x^\ell$ として、$x=1$ としてしまった場合もやっと2002年に解けたのです。

このお話はここでいったんおしまいにします。